Павлов С.В. Рефлексивная фильтрация временных рядов // Вестник университетского комплекса: Сб. науч. трудов / Под общей ред. профессора Н.В. Василенко; Красноярск: ВСФ РГУИТП, НИИ СУВПТ. – 2005. – Вып. 5(19). с. 56–64

УДК 62-506.1

РЕФЛЕКСИВНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

С.В. Павлов
Красноярский государственный технический университет
Красноярский филиал НГОУ «Институт управления и экономики» (г. Санкт-Петербург)
660074, Красноярск, а/я 16839
sergey-pavlov@rambler.ru

Пусть осуществляется **наблюдение** некоторого **свойства** выбранного **объекта**, причем так, что над полученной в результате наблюдений **последовательностью данных** можно произвести **упорядочивание** по **времени**. Такие последовательности будем называть **временными рядами**. Более того, указанное наблюдение осуществляется через равные промежутки времени, т.е. временные ряды являются **эквидистантными** (регулярными).

Вследствие **неточностей** и **нечеткостей** измерения, **помех** и **шумов** измерений, а также возможной высокой степени **сложности** объекта, порождающего наблюдаемое свойство, полученный временной ряд может иметь **сложный** «**зазубренный**» вид (рис. 1, 2).

При решении различных задач ставятся цели **сглаживания** исходных временных рядов, а также выделения **тенденций** в исходных временных рядах.

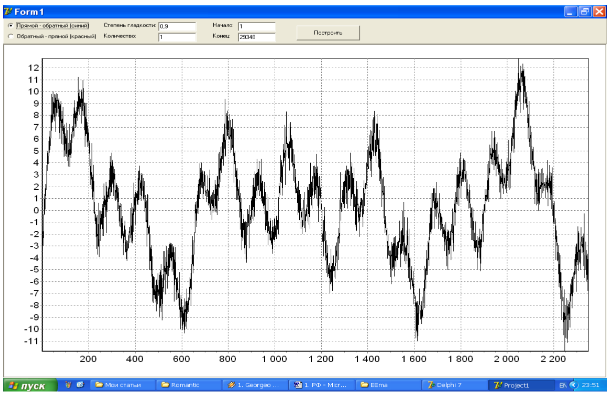

Рис. 1. Сумма гармонического (сигнал) и Гауссовского (помеха, шум) процессов

Рис. 2. Наблюдения котировки EURUSD в течение двух лет

Пусть в результате наблюдений получен временной ряд $\mathbf{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Поскольку наблюдения являются эквидистантными, достаточно лишь индекса времени i: 1-й момент времени, …, i-й момент времени, …, n-й момент времени ($i = 1, \ldots, n$).

Под **целевой фильтрацией** временного ряда будем понимать выделение тенденций и сглаживание. Тогда отфильтрованный временной ряд будем обозначать как $\mathbf{Y} = \{y_1, \ldots, y_n\}$.

Если $\mathbf{RF}[\cdot]$ – используемый для фильтрации рефлексивный фильтр (рис. 3), то в операторной форме рефлексивная фильтрация выглядит так:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{RF}[\mathbf{X}]. \tag{1}$$

В основе рефлексивной фильтрации лежит **базисное рефлексивное преобразование**:

$$y_i = \mu \cdot x_i + \overline{\mu} \cdot y_{i-1}, \text{ где } \overline{\mu} = 1 - \mu \text{ и } \mu \in [0;1]. \tag{2}$$

Параметр рефлексивного фильтра μ характеризует **степень гладкости** результирующего преобразования. В общем виде, чем меньше μ, тем сглаживание будет более сильным, а при $\mu = 1$ сглаживания нет и $\mathbf{Y} = \mathbf{X}$, что непосредственно вытекает из (2).

Преобразование (2) является **рефлексивным** вследствие наличия в нем **обратной связи** (рис. 3), что вносит в отфильтрованные временные ряды дополнительные рекуррентные (**рефлексивные**) характеристики **памяти** (в отфильтрованных временных рядах будущее определяется прошлым гораздо более сильно, чем в исходных).

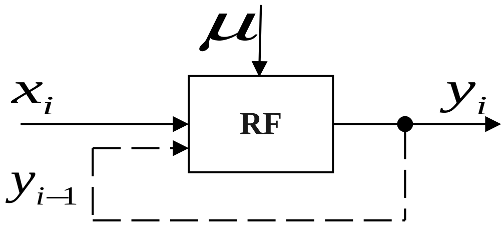

Рис. 3. Рефлексивный фильтр

Кратко охарактеризуем методологию **рефлексивной фильтрации временных рядов**. Рефлексивная фильтрация основана на **базисном рефлексивном преобразовании** (2). Из этого преобразования формируются **прямой** и **обратный** рефлексивные фильтры. Далее из этих базовых рефлексивных фильтров синтезируются **двусторонние** фильтры: **прямой-обратный** и **обратный-прямой**. Затем описанные четыре рефлексивных фильтра обобщаются на случай **многократного** и **эпистемологического** рефлексивного преобразования (см. рис. 4 и табл. 1).

Прямая рефлексивная фильтрация является непосредственным применением преобразования (2) к исходному временному ряду. При таком преобразовании отфильтрованный временной ряд имеет **запаздывание** по отношению к исходному.

Обратная рефлексивная фильтрация основана на предлагаемом В.Ф. Слюсарчуком операторе **инверсии** исходного временного ряда с целью его обработки с **конца**. Преимущество такого подхода выражается в том, что **запаздывание** при исходном направлении времени превращается в **опережение** при времени, текущем в обратном направлении.

Двусторонняя рефлексивная фильтрация основана на синтезе прямой и обратной рефлексивной фильтрации. В этом случае появляется возможность **управления запаздыванием** и **опережением** отфильтрованного временного ряда относительно исходного за счет **варьирования** параметра μ.

Многократная рефлексивная фильтрация позволяет за счет **многократного** применения рефлексивного фильтра к исходному временному ряду добиться **особенных гладких** свойств отфильтрованного временного ряда, которые затруднительно получить при **однократном** применении рефлексивной фильтрации.

Эпистемологическая рефлексивная фильтрация основана на том, чтобы сделать фильтрацию **неравномерной** посредством выбора параметра μ **переменным** в процессе фильтрации. (Эпистемология или теория познания – раздел философии, в котором изучаются природа и сфера распространения знания, его предпосылки и основы, а также критерии истинности знания.) Поскольку **структура эпистемологической системной иерархии объекта**, порождающего наблюдаемое свойство, **отражена** и в конкретном наблюдаемом временном ряде (в случаях, когда наблюдение осуществляется так долго, что содержит влияние всех существенных факторов), имеет смысл рассматривать адекватную фильтрацию, когда степень соответствия отфильтрованного и исходного временных рядов все более возрастает с течением времени к концу выборки (к текущему моменту). Таким образом, $\mu = \mu(i)$. Следует помнить, что $\mu_i = \mu(i) \in [0;1]$, т.е. функция $\mu(i)$ всегда ограничена сверху единицей и снизу нулем. Функция $\mu = \mu_i = \mu(i)$ есть **эпистемологическая рефлексивная функция**, выбор вида которой определяется **целью фильтрации**, **априорной информацией** о решаемой задачи, а, именно, информацией о предполагаемой или желаемой **структуре** временного ряда. Важно отметить, что идея эпистемологической фильтрации была предложена автором для «подготовки» временного ряда для

прогнозировании. Эта идея основывалась на гипотезе о том, что, чем дальше в прошлое уходят значения временного ряда от текущего момента времени, тем слабее влияет на будущее каждое конкретное значение и тем сильнее влияние некоторых **статистических средних** (основных тенденций).

Все предложенные фильтры (рис. 4), синтезированные на основе **прямой**, **обратной**, **двусторонней**, **многократной** и **эпистемологической** рефлексивной фильтрации, представлены в табл. 1 и могут использоваться при проектировании автоматизированных информационных технологий фильтрации наблюдаемых временных рядов.

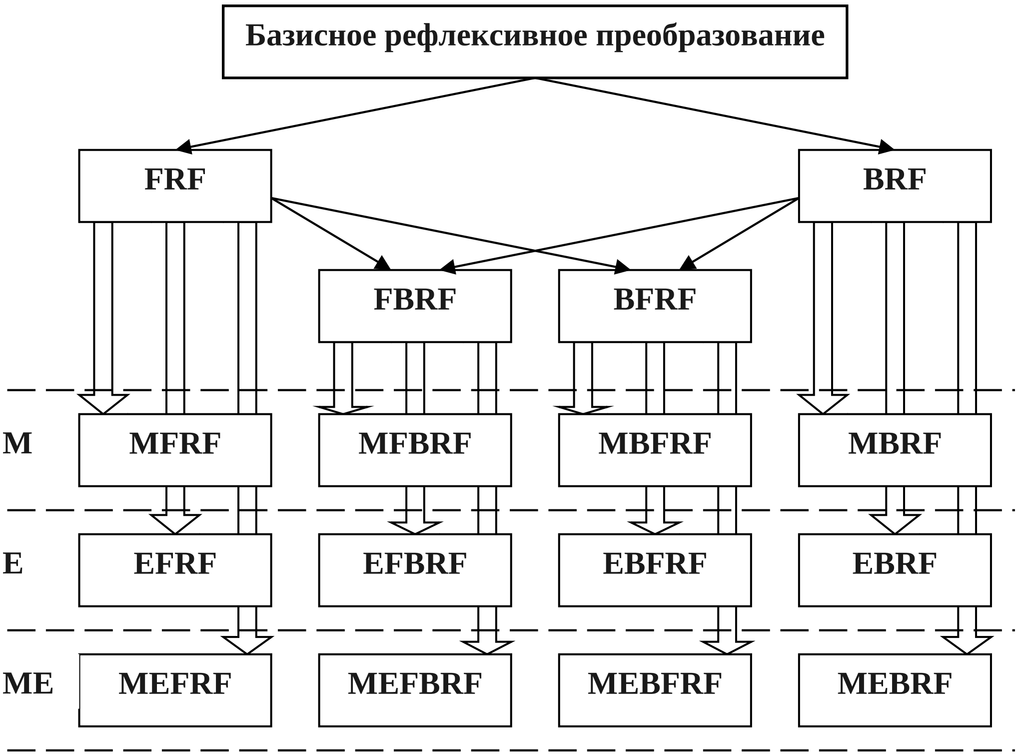

Рис. 4. Иерархия рефлексивных фильтров

Формирование начальных условий фильтрации. Используя каждый рефлексивный фильтр (табл. 1), на первом этапе всегда необходимо некоторым образом выбирать исходные условия в качестве набора зафиксированных значений. Такими могут быть значения исходных временных рядов, определяемых целевой функцией задачи или же некоторая их **комбинация**.

Если последовательно выписать все этапы рефлексивных преобразований и осуществить все необходимые упрощения, то в итоге **всегда каждый** элемент временного ряда $\mathbf{Y}=\{y_1,\ldots,y_n\}$ представим в виде **линейной комбинации** (**взвешенного среднего**) элементов исходного временного ряда $\mathbf{X}=\{x_1,\ldots,x_n\}$:

$$y_i=\sum_{j=1}^{n}\omega_{i,j}\cdot x_j\text{, где }\sum_{j=1}^{n}\omega_{i,j}=1,\ 0\le\omega_{i,j}\le 1\text{ и } i,j=1,\ldots,n, \tag{3}$$

т.е. **все** представленные **рефлексивные фильтры являются линейными** (и, естественно, **цифровыми**). Весовые коэффициенты $\omega_{i,j}$ определяются исключительно лишь выбором параметра μ, т.е. $\omega_{i,j}=\omega_{i,j}(\mu)$ что не трудно показать.

Рассмотрим фильтр **FRF**, определяющийся следующим преобразованием:

$$y_i=\mu\cdot x_i+\bar{\mu}\cdot y_{i-1},\ i=2,\ \ldots,\ n. \tag{4}$$

В силу **рефлективности** можно записать следующее:

$$y_i=\mu\cdot x_i+\bar{\mu}\cdot(\mu\cdot x_{i-1}+\bar{\mu}\cdot y_{i-2})=\mu\cdot x_i+\mu\cdot\bar{\mu}\cdot x_{i-1}+\bar{\mu}^2\cdot(\mu\cdot x_{i-2}+\bar{\mu}\cdot y_{i-3}),\ i=2,\ \ldots,\ n. \tag{5}$$

В конечном счете (4) будет выглядеть так:

$$y_i = \mu \cdot x_i + \mu \cdot \bar{\mu} \cdot x_{i-1} + \mu \cdot \bar{\mu}^2 \cdot x_{i-2} + \mu \cdot \bar{\mu}^3 \cdot x_{i-3} + \ldots + \bar{\mu}^{i-1} \cdot x_1,\ i = 2, \ldots, n. \qquad (6)$$

Таким образом, доказано (3) для **FRF**-фильтра. То же самое (в смысле утверждения (3)) может быть получено для любого другого предложенного рефлексивного фильтра.

Необходимо отметить, что **все** предложенные рефлексивные фильтры принадлежат к классу фильтров с **бесконечной импульсной характеристикой**, т.е. при формировании **каждого** элемента отфильтрованного временного ряда **Y** используются **все** элементы исходного временного ряда **X**, что показано в (3).

Таблица 1. Классификация рефлексивных фильтров (РФ)

РФ	Название РФ	Преобразование РФ
FRF	*Прямой РФ*	$y_i = \mu \cdot x_i + \bar{\mu} \cdot y_{i-1}$, $i = 2, \ldots, n$
MFRF	*Многократный прямой РФ*	$y_{k,i} = \mu \cdot y_{k-1,i} + \bar{\mu} \cdot y_{k,i-1}$, $i = 2, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, K$
EFRF	*Эпистемологический прямой РФ*	$y_i = \mu_i \cdot x_i + \bar{\mu}_i \cdot y_{i-1}$, $i = 2, \ldots, n$
MEFRF	*Многократный эпистемологический прямой РФ*	$y_{k,i} = \mu_{k,i} \cdot y_{k-1,i} + \bar{\mu}_{k,i} \cdot y_{k,i-1}$, $i = 2, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, K$
BRF	*Обратный РФ*	$y_i = \mu \cdot x_i + \bar{\mu} \cdot y_{i+1}$, $i = n-1, \ldots, 1$
MBRF	*Многократный обратный РФ*	$y_{k,i} = \mu \cdot y_{k-1,i} + \bar{\mu} \cdot y_{k,i+1}$, $i = n-1, \ldots, 1$, $k = 1, \ldots, K$
EBRF	*Эпистемологический обратный РФ*	$y_i = \mu_i \cdot x_i + \bar{\mu}_i \cdot y_{i+1}$, $i = n-1, \ldots, 1$
MEBRF	*Многократный эпистемологический обратный РФ*	$y_{k,i} = \mu_{k,i} \cdot y_{k-1,i} + \bar{\mu}_{k,i} \cdot y_{k,i+1}$, $i = n-1, \ldots, 1$, $k = 1, \ldots, K$
FBRF	*Двусторонний (прямой-обратный) РФ*	$\chi_i = \mu \cdot x_i + \bar{\mu} \cdot \chi_{i-1}$, $i = 2, \ldots, n$ $y_i = \mu \cdot \chi_i + \bar{\mu} \cdot y_{i+1}$, $i = n-1, \ldots, 1$
MFBRF	*Многократный двусторонний (прямой-обратный) РФ*	$\chi_{k,i} = \mu \cdot y_{k-1,i} + \bar{\mu} \cdot \chi_{k,i-1}$, $i = 2, \ldots, n$ $y_{k,i} = \mu \cdot \chi_{k,i} + \bar{\mu} \cdot y_{k,i+1}$, $i = n-1, \ldots, 1$, $k = 1, \ldots, K$
EFBRF	*Эпистемологический двусторонний (прямой-обратный) РФ*	$\chi_i = \mu_i \cdot x_i + \bar{\mu}_i \cdot \chi_{i-1}$, $i = 2, \ldots, n$ $y_i = \mu_i \cdot \chi_i + \bar{\mu}_i \cdot y_{i+1}$, $i = n-1, \ldots, 1$
MEFBRF	*Многократный эпистемологический двусторонний (прямой-обратный) РФ*	$\chi_{k,i} = \mu_{k,i} \cdot y_{k-1,i} + \bar{\mu}_{k,i} \cdot \chi_{k,i-1}$, $i = 2, \ldots, n$ $y_{k,i} = \mu_{k,i} \cdot \chi_{k,i} + \bar{\mu}_{k,i} \cdot y_{k,i+1}$, $i = n-1, \ldots, 1$, $k = 1, \ldots, K$
BFRF	*Двусторонний (обратный-прямой) РФ*	$\chi_i = \mu \cdot x_i + \bar{\mu} \cdot \chi_{i+1}$, $i = n-1, \ldots, 1$ $y_i = \mu \cdot \chi_i + \bar{\mu} \cdot y_{i-1}$, $i = 2, \ldots, n$
MBFRF	*Многократный двусторонний (обратный-прямой) РФ*	$\chi_{k,i} = \mu \cdot y_{k-1,i} + \bar{\mu} \cdot \chi_{k,i+1}$, $i = n-1, \ldots, 1$ $y_{k,i} = \mu \cdot \chi_{k,i} + \bar{\mu} \cdot y_{k,i-1}$, $i = 2, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, K$
EBFRF	*Эпистемологический двусторонний (обратный-прямой) РФ*	$\chi_i = \mu_i \cdot x_i + \bar{\mu}_i \cdot \chi_{i+1}$, $i = n-1, \ldots, 1$ $y_i = \mu_i \cdot \chi_i + \bar{\mu}_i \cdot y_{i-1}$, $i = 2, \ldots, n$
MEBFRF	*Многократный эпистемологический двусторонний (обратный-прямой) РФ*	$\chi_{k,i} = \mu_{k,i} \cdot y_{k-1,i} + \bar{\mu}_{k,i} \cdot \chi_{k,i+1}$, $i = n-1, \ldots, 1$ $y_{k,i} = \mu_{k,i} \cdot \chi_{k,i} + \bar{\mu}_{k,i} \cdot y_{k,i-1}$, $i = 2, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, K$

Рассмотрим практическое (в некотором смысле тестовое) применение фильтров **MBFRF** и **EBRF**. Выбор именно эти фильтров для иллюстрации рефлексивной фильтрации обусловлен тем, что данные фильтры **успешно** использовались автором в задачах фильтрации при работе с наблюдениями свойств сложных объектов. В качестве тестов рассмотрим 3 случая: случай **импульсного** (скачкообразного) временного ряда (рис. 5), демонстрирующего импульсную характеристику используемого фильтра, случай **выделения сигнала** (при соотношении сигнал/шум равном 1) (рис. 6) и случай **неравномерной эпистемологической** фильтрации (рис. 7, 8).

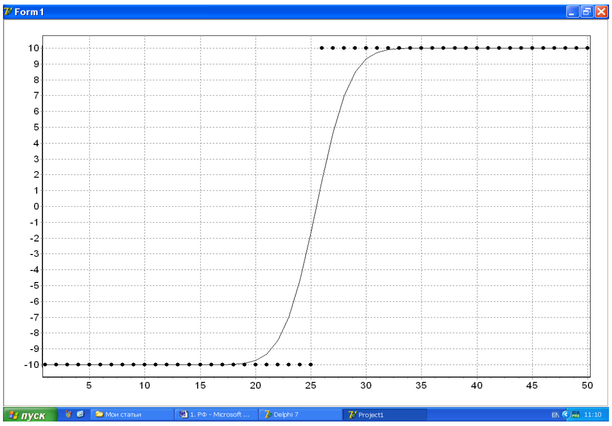

Рис. 5. **MBFRF**-фильтрация импульса.

, ,

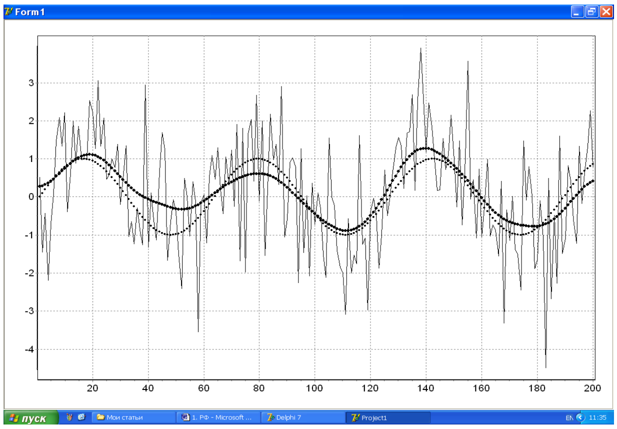

Рис. 6. **MBFRF**-фильтрация тангенциального сигнала.

, ,

Рис. 7. **EBRF**-фильтрация. , эпистемолгическая рефлексивная функция представлена на рис. 8

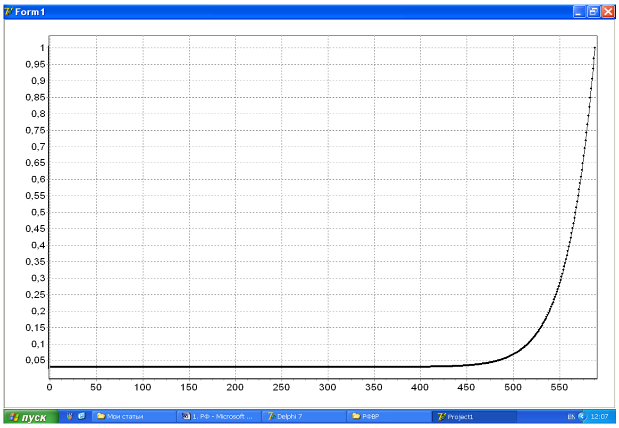

Рис. 8. Эпистемологическая рефлексивная функция для рис. 7

Видно (рис. 5–8), что с поставленными тестовыми задачами (которые были, не смотря на тестовую постановку, достаточно трудными) фильтры **MBFRF** и **EBRF** «**справились**».

В представленной работе, к сожалению автора, остался не рассмотренным вопрос о **характеристиках** предлагаемых фильтров. Характеристики здесь – это традиционные **передаточные функции** фильтров и их классический последующий анализ (**фазовые** и **амплитудные** частотные характеристики, **переходные** и **импульсные** характеристики и т.д.). Всестороннее сравнительное рассмотрение таких характеристик позволит глубже разобраться в **природе преобразований**, осуществляемых рефлексивными фильтрами, а также поможет среди большого разнообразия рефлексивных фильтров выбирать конкретные фильтры для решения прикладных задач фильтрации.

Все представленные рефлексивные фильтры «работают» только в **действительной** (вещественной) области. Это обусловлено их **практической** направленностью, поскольку в **реальных** условиях **наблюдения** осуществляются только в **действительной** области. Тем не менее, при необходимости, рефлексивная фильтрация может использоваться и в **комплексном** (состоящем из **действительной** и **мнимой** части) случае.