Павлов С.В. Иерархические коллективы линейных моделей прогноза сложных наблюдаемых временных рядов // Журнал «Системы управления и информационные технологии», 2007, № 1 (27), с. 18–22

УДК 519.216.3

ИЕРАРХИЧЕСКИЕ КОЛЛЕКТИВЫ ЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ ПРОГНОЗА СЛОЖНЫХ НАБЛЮДАЕМЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

С.В.Павлов

В статье рассматривается иерархическое прогнозирование сложных наблюдаемых временных рядов на основе построения коллективов линейных рекуррентных моделей прогноза.

Введение

Объектами исследования с познавательных и прагматических позиций в современном научно-техническом знании становятся все более сложные объекты наблюдаемой части окружающего мира, вследствие чего методы и средства познания и исследования таких объектов также усложняются.

Сложные объекты характеризуются множеством существенных особенностей, среди которых особенно выделяются:

⇒ динамическая сложность: трудность прогнозирования поведения объекта в «будущем» – проблема прогнозирования наблюдаемой динамики свойств сложных объектов [1, 2, 3, 4];

⇒ организованная сложность: социальный генезис объектов, не являющихся ни детерминированными, ни стохастическими, а также их глобальность – планетарный масштаб [5];

⇒ принципы бихевиоризма (поведения): саморазвитие, самоорганизация, рефлексия, обратная связь, опережающее отражение [6, 7, 8].

Стремление к исследованию таких сложных объектов актуализируется посредством двух направлений: создание более сложных моделей (введение нелинейностей, повышение порядков, размерностей и пр.) и формирование концепций, основанных на новых методологических парадигмах (например, оперирование конечными и дискретными моделями и т.д.).

В противопоставление такому усложнению в этой статье предлагаются простые модели иерархического прогнозирования временных рядов в предположении, что породившие их объекты характеризуются иерархической стратификацией воздействующих на них факторов окружающей среды [9, 10].

Получаемые из наблюдений сложные временные ряды характеризуются множеством специфических особенностей:

⇒ нерегулярность;

⇒ недетерминированность;

⇒ композиционность;

⇒ иерархичность.

Перечисленные особенности присущи наблюдаемой динамике геофизических, финансово-экономических и других объектов. Исходя из этих особенностей будет строится иерархическое прогнозирование.

Целью статьи является изложение идеи построения методики иерархического прогнозирования сложных наблюдаемых временных рядов на основе синтеза коллективов линейных рекуррентных моделей прогноза и селекции среди них наилучших прогнозных моделей.

Методика

Пусть $\mathbf{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ – полученный в результате наблюдений за сложным объектом эквидистантный временной ряд (например, котировка валют, курс акции, атмосферное давление и т.д.).

Под задачей прогнозирования будем понимать формальное оценивание будущих значений $\mathbf{X}$, т.е. значений $\{x_{n+1}, \ldots, x_{n+r}\}$, где r – горизонт прогноза.

Среди всего множества разнообразных методов прогнозирования мы выбираем именно класс рекуррентных моделей, поскольку они позволяют в явном виде учитывать прошлые значения временного ряда. При этом зависимости от времени рекуррентных моделей нет. Мы будем исходить из предположения о том, что исследуемые временные ряды характеризуются наличием памяти.

Иерархическое прогнозирование основано на формировании временных рядов разных временных масштабов (рис. 1). Для этого из исходного наблюдаемого временного ряда 1-го масштабного уровня $(\Delta = 1: x_1, x_2, \ldots, x_{19}, x_{13})$ регулярно исключается $\Delta - 1$ элементов, в результате чего получается временной ряд масштаба Δ. Каждому масштабному уровню Δ соответствуют Δ временных рядов (рис. 1).

Следующим этапом является прогнозирование сформированных временных рядов каждого временного масштаба, для чего и синтезируем коллективы рекуррентных прогнозных моделей.

Выберем в качестве основы для частных моделей прогноза полином Колмогорова-Габора [11, 12, 13], который применительно к рассматриваемой задаче может выглядит следующим образом:

$$\tilde{x}_p = \sum_{j=1}^{d} \alpha_j x_{p-j} + \sum_{j=1}^{M_d} \sum_{k=1}^{M_d} \alpha_{jk} x_{p-j} x_{p-k} + \ldots, \qquad (1)$$

В качестве базовой прогнозной модели выберем линейную рекуррентную формулу (ЛРФ) [12, 13]

$$\tilde{x}_p = \sum_{j=1}^{d} \alpha_j x_{p-j} \cdot \quad (2)$$

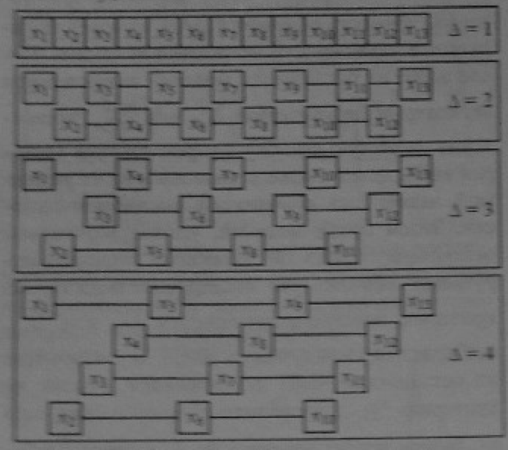

Рис. 1. Формирование временные рядов различных масштабов по времени

Известно [12, 13], что ЛРФ может быть описан любой аналитический временной ряд вида

$$y_t = \sum_{k=1}^{s} A_k \left(a_{k,1} + \ldots + a_{k,m_k} t^{m_k}\right) e^{\lambda_k t} \sin(\omega_k t + \varphi_k) \cdot \quad (3)$$

На практике наблюдаемый сложный временной ряд может плохо описываться линейной рекуррентной моделью, поскольку не обладает необходимой для этого целостностью [14, 15, 16, 17, 18]. В этом случае рекомендуется воспользоваться методами рефлексивной [19] и сегментной [20] фильтрации.

Далее необходимо получить численную оценку коэффициентов $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_d\}$. В следствие того, что ЛРФ является линейно параметризованной моделью, оценить коэффициенты $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_d\}$ можно с помощью метода наименьших квадратов исходя из минимизации отклонения прогнозных и истинных значений:

$$\Sigma_\Delta^2 = \sum_{p=d+1}^{L} \left(\tilde{x}_p - x_p\right)^2 \to \min_{\alpha_1, \ldots, \alpha_d} \cdot \quad (4)$$

Минимизация Σ_Δ^2 сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\begin{cases} \alpha_1 \sum_{p=d+1}^{L} x_{p-1} x_{p-1} + \ldots + \alpha_d \sum_{p=d+1}^{L} x_{p-1} x_{p-d} = \sum_{p=d+1}^{L} x_{p-1} x_p \\ \alpha_1 \sum_{p=d+1}^{L} x_{p-2} x_{p-1} + \ldots + \alpha_d \sum_{p=d+1}^{L} x_{p-2} x_{p-d} = \sum_{p=d+1}^{L} x_{p-2} x_p \\ \ldots \\ \alpha_1 \sum_{p=d+1}^{L} x_{p-d} x_{p-1} + \ldots + \alpha_d \sum_{p=d+1}^{L} x_{p-d} x_{p-d} = \sum_{p=d+1}^{L} x_{p-d} x_p \end{cases} \cdot \quad (5)$$

Найденные посредством решения такой СЛАУ оценки коэффициентов $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_d\}$ являются наилучшими в среднеквадратическом смысле критерия Σ_Δ^2 [21, 22].

Существенным ограничением такого подхода к оцениванию коэффициентов $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_d\}$ является то, что в случае плохой обусловленности СЛАУ ее решение не представляется тривиальной задачей. В этом случае, когда задача становится некорректно поставленной, использование традиционных методов (например, метод Гаусса) в чистом виде не приемлемо и необходимо либо применение теории получения гарантированной точности решения СЛАУ, разработанной акад. С.К. Годуновым [23], либо использование методов регуляризации [24, 25, 26].

Методика построения коллективов линейных прогнозных моделей основана на двух идеях. Первая – создание множества линейных моделей прогноза, построенных на разных обучающих последовательностях и с разной глубиной памяти. Вторая – выбор «лучшей» модели прогноза среди всех моделей на основе множества критериев «качества» различной природы.

Линейную модель прогноза (структура которой определяется ЛРФ), построенную не на всех n элементах **X**, а лишь на выбранных L с конца, будем называть частной моделью прогноза (ЧМП) порядка (L, d): ЧМП(L, d).

Параметр L характеризует длину обучающей последовательности, на основе которой оцениваются коэффициенты ЧМП. Параметр d определяет глубину памяти ЧМП. Выбирая различные значения L и d, можно построить коллектив частных моделей прогноза (КЧМП) в пространстве $\mathbf{L} \times \mathbf{D}$.

Внутри КЧМП разные частные модели будут обладать различным качеством прогнозирования **X**.

Качество ЧМП – это своеобразный камень преткновения: апостериори всегда просто сказать, «хорошая» модель или «плохая», но сделать такой вывод необходимо априори, что является проблемой. Необходимо выбрать среди КЧМП единственную, на основе которой будет осуществлен прогноз, причем этот выбор должен быть обоснованным как *философски*, так и *строго формально*.

Попробуем сформулировать и определить множество критериев оценки качества ЧМП и регламент выбора единственной наилучшей модели на основе предложенных критериев.

1. **Среднеквадратическая ошибка аппроксимации Σ_Δ^2:**

$$\Sigma_A^2(L,d)=\sum_{p=v}^{v+L-1}\left(\sum_{j=1}^{d}(\alpha_j x_{p-j})-x_p\right)^2\to 0\cdot \qquad (6)$$

Σ_A^2 определяет качество ЧМП(L, d) на обучающей последовательности.

В зависимости от решаемой задачи, рекомендуется использование **среднеквадратической ошибки динамической аппроксимации** Σ_{DA}^2, что позволяет определить веса для отклонений прогнозных значений от истинных:

$$\Sigma_{DA}^2(L,d)=\sum_{p=v}^{v+L-1}\omega_p\left(\sum_{j=1}^{d}(a_j x_{p-j})-x_p\right)^2\to 0\cdot \qquad (7)$$

2. **Среднеквадратическая ошибка экстраполяции** Σ_E^2:

$$\Sigma_E^2(L,d)=\sum_{p=v+L}^{n}\left(\sum_{j=1}^{d}(\alpha_j\cdot x_{p-j})-x_p\right)^2\to 0\cdot \qquad (8)$$

Σ_E^2, согласно А.Г. Ивахненко [2, 3], наделяется смыслом внешнего Геделевского дополнения и является экзаменационным или контрольным критерием.

Также рекомендуется использование **среднеквадратической ошибки динамической экстраполяции** Σ_{DE}^2:

$$\Sigma_{DE}^2(L,d)=\sum_{p=v+L}^{n}\omega_p\left(\sum_{j=1}^{d}(\alpha_j x_{p-j})-x_p\right)^2\to 0\cdot \qquad (9)$$

3. **Точность (невязка) решения СЛАУ** Σ_ε:

$$\Sigma_\varepsilon(L,d)=\sum_{k=1}^{d}\left|\sum_{s=1}^{d}\alpha_s\sum_{p=v}^{v+L-1}x_{p-k}x_{p-s}-\sum_{p=v}^{v+L-1}x_{p-k}x_p\right|\to 0\cdot \qquad (10)$$

Σ_ε есть общая точность решения СЛАУ, являющаяся накоплением ошибок решения уравнений, составляющих СЛАУ. Использование такого критерия обязательно, так как только этот критерий позволяет обоснованно использовать ЧМП(L, d). Применение этого критерия является, очевидно, первичным, так как после решения СЛАУ позволяет судить о том, может ли использоваться полученная ЧМП(L, d) для прогнозирования.

4. **Баланс коэффициентов ЧМП** ${}^{I}B_{\{\alpha\}}$ и ${}^{II}B_{\{\alpha\}}$:

$${}^{I}B_{\{\alpha\}}(L,d)=\sum_{j=1}^{d}\alpha_j\to 1\cdot \qquad (11)$$

$${}^{II}B_{\{\alpha\}}(L,d)=\sum_{j=1}^{d}\alpha_j^2\le \mathrm{const}\cdot \qquad (12)$$

Критерий ${}^{I}B_{\{\alpha\}}$ определяет согласованность и нормировку коэффициентов ЧМП(L, d). Критерий ${}^{II}B_{\{\alpha\}}$ необходим для того, чтобы значения коэффициентов не принимали слишком больших значений.

Регламент дедуктивного выбора «наилучшей» ЧМП. Прежде всего, необходимо исключить ЧМП, Σ_ε которых превышает приемлемую точность решения СЛАУ, которая выбирается в зависимости от решаемой задачи. После этого из оставшихся моделей исключаются те, которые по критерию Σ_A^2 или Σ_{DA}^2 превосходят заданную ошибку аппроксимации (которая выбирается также в зависимости от решаемой задачи) на обучающей последовательности. Затем среди моделей, удовлетворительно решающих СЛАУ и «хорошо» аппроксимирующих обучающую последовательность, по критерию внешнего дополнения Σ_E^2 или Σ_{DE}^2 выбираются «наилучшие» ЧМП. В заключение из оставшихся ЧМП исключаются модели по критерию ${}^{II}B_{\{\alpha\}}$, после чего «лучшей» считается та, баланс коэффициентов ${}^{I}B_{\{\alpha\}}$ которой наиболее близок к 1.

Результаты вычислительных экспериментов

Для демонстрации работоспособности и состоятельности предложенной методики построения коллективов линейных прогнозных моделей, а также того, что их «иерархическое» расширение позволяет добиться лучших результатов по сравнению с простым прогнозированием исходного временного ряда, рассмотрим прогнозирование тестового временного ряда (рис. 2), являющегося суммой 20 синусоид.

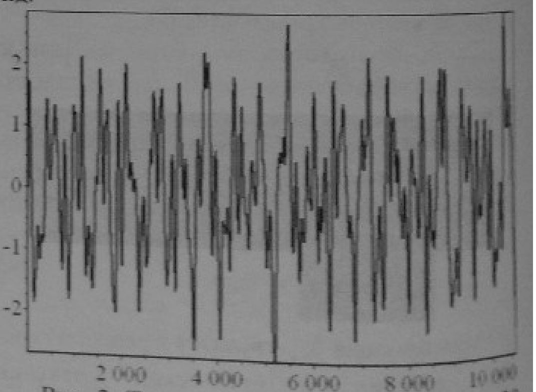

Рис. 2. Тестовый временной ряд (сумма 20 синусоид)

Осуществим прогноз этого временного ряда (рис. 2) по одному (рис. 3) и по 40 (рис. 4) иерархическим уровням, воспользовавшись коллективами линейных рекуррентных моделей прогноза.

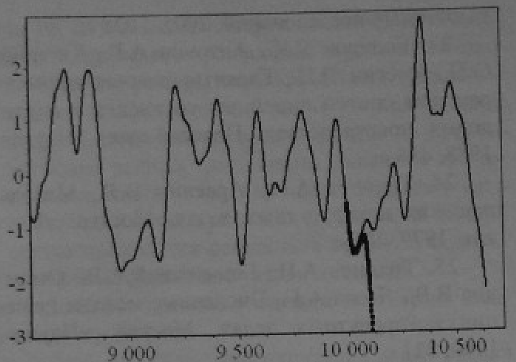

Рис. 3. Прогнозирование тестового временного ряда (рис. 2) на 120 точек вперед по одному иерархическому уровню с параметрами коллектива $L = 60 \div 300$ и $d = 10 \div 30$

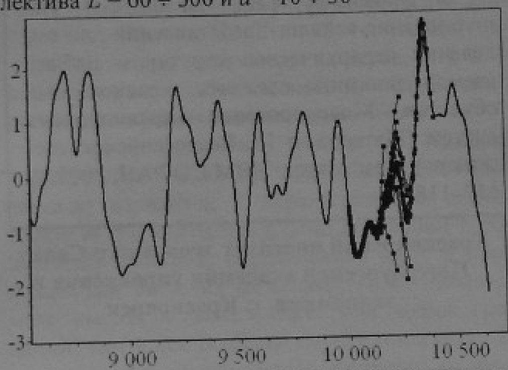

Рис. 4. Прогнозирование тестового временного ряда (рис. 2) на 12 точек вперед по 33 иерархическим уровням с параметрами коллективов $L = 60 \div 300$ и $d = 10 \div 30$

Видно, что использование иерархического подхода к прогнозированию (основанного в этой статье на формировании временных рядов различных временных масштабов по времени) позволило при прочих равных условиях значительно повысить качество прогнозирования.

Заключение

Иерархическое прогнозирование может быть конструктивным и полезным в применении к сложным неравновесным объектам и системам, модель структуры которых является иерархической, а их наблюдаемые свойства инкапсулируют в себе такую стратификацию [27]. Иерархическое прогнозирование не являются универсальными при решении задач прогнозирования временных рядов.

Предложенная методика иерархического прогнозирования на основе коллективов рекуррентных моделей прогноза обладает необходимой степенью технологичности, что позволяет использовать ее без каких-либо модификаций при решении задач построения прогнозов сложных наблюдаемых временных рядов.

Список использованных источников

1. Касти Дж., Большие системы: связность, сложность и катастрофы, Москва: «Мир», 1982, 216 с.

2. Ивахненко А.Г., Долгосрочное прогнозирование и управление сложными системами, Киев: «Техника», 1975, 312 с.

3. Ивахненко А.Г., Лапа В.Г., Предсказание случайных процессов, Киев: «Наукова думка», 1971, 416 с.

4. Чернышев С.Л., Моделирование экономических систем и прогнозирование их развития, Москва: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003, 232 с.

5. Клир Дж., Системология: автоматизация решения системных задач, Москва: «Радио и связь», 1990, 544 с.

6. Разумовский О.С., Бихевиоральные системы, Новосибирск: «Наука», Сибирская издательская фирма, 1993, 240 с.

7. Николис Г., Пригожин И., Познание сложного, Москва: «Едиториал УРСС», 2003, 344 с.

8. Лефевр В.А., О самоорганизующихся и саморефлексивных системах и их исследовании, Проблемы исследования систем и структур, 1965, с.61–68

9. Павлов С.В., Слюсарчук В.Ф., Иерархическое прогнозирование наблюдаемых свойств сложных неравновесных объектов и систем, Моделирование неравновесных систем (материалы IX Всероссийского семинара), Красноярск: ИВМ СО РАН, 2006, с. 133–134

10. Слюсарчук В.Ф., Масштабные иерархии в задачах наблюдений и интерпретации состояния геофизических сред и сложных объектов, Сб. науч. тр. НПО «Сибцветметавтоматика» НИИ «Геоцветмет», 1991. с. 21–29

11. Колмогоров А.Н., Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей, Избранные труды, 2005, т. 2, с. 268–276

12. Голяндина Н.Э., Метод «Гусеница-SSA»: прогноз временных рядов, Санкт-Петербург: Изд-во СПбГУ, 2003, 55 с.

13. Данилов Д.Л., Жиглявский А.А., Главные компоненты временных рядов: метод «Гусеница», Санкт-Петербург: «Пресском», 1998, 308 с.

14. Павлов С.В., Оценивание спектра траекторной целостности наблюдений свойств сложных объектов, Моделирование неравновесных систем (Материалы VIII Всероссийского семинара), Красноярск: ИВМ СО РАН, 2005, с. 133–134

15. Павлов С.В., Алгоритмы оценивания целостности наблюдаемых временных рядов, Решетневские чтения (материалы X Международной научной конференции), Красноярск: СибГАУ, 2006, с. 256–257

16. Кравцов Ю.А., Случайность, детерминированность, предсказуемость, Успехи физических наук, Май 1989, т. 158, вып. 1, с. 93–122

17. Татарский В.И., О критериях степени хаотичности, Успехи физических наук, Май 1989, т. 158, вып. 1, с. 123–126

18. Челидзе Т.Л., Мачарашвили Т.И., Анализ сложности природных объектов и процессов – вызов геофизике XXI века, Проблемы геофизики XXI века, 2003, кн. 1, с. 142–159

19. Павлов С.В., Рефлексивная фильтрация временных рядов, Вестник университетского комплекса, Красноярск: ВСФ РГУИТП, НИИ СУВПТ, 2005, вып. 5(19), с. 56–64

20. Хармут Х., Теория секвентного анализа: основы и применения, Москва: «Мир», 1980, 576 с.

21. Колмогоров А.Н., К обоснованию метода наименьших квадратов, Избранные труды, 2005, т. 2, с. 281–292

22. Пеллер В.В., Операторы Ганкеля и их приложения, Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований, 2005, 1028 с.

23. Годунов С.К., Антонов А.Г., Кирилюк О.П., Костин В.И., Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах, Новосибирск: «Наука», 1988, 456 с.

24. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я., Методы решения некорректных задач, Москва: «Наука», 1979, 286 с.

25. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г., Численные методы решения некорректных задач, Москва: «Наука», 1990, 231 с.

26. Форсайт Дж., Молер К., Численное решение систем линейных алгебраических уравнений, Москва: «Мир», 1969, 168 с.

27. Максимов А.И., Павлов С.В. Использование вейвлет-представлений для выделения иерархической структуры наблюдаемой динамики сложных неравновесных объектов, Моделирование неравновесных систем (Материалы IX Всероссийского семинара), Красноярск: ИВМ СО РАН, 2005, с. 117–118.

Красноярский институт экономики Санкт-Петербургской академии управления и экономики, г. Красноярск