***Об организации решения исследовательской задачи по математике школьниками 5-6 класса*[1]**

Авторы: Баженова Ксения Анатольевна, кандидат педагогических наук, ст.преподаватель кафедры педагогики высшей школы Института педагогики, психологии и социологии ФГОАУ ВПО «Сибирский Федеральный университет»

Баранова Светлана Валерьевна, учитель математики МБОУ СОШ №93 г. Красноярска,

Саакян Светлана Николаевна, учитель математики МБОУ Гимназия №10 г. Красноярска.

Среди личностных характеристик выпускника школы в рамках нового стандарта обозначены следующие: владение основами научных методов познания окружающего мира; способность осуществлять учебно-исследовательскую, проектную и информационно-познавательную деятельность; мотивирование на образование и самообразование в течение всей своей жизни[2]. В результате обучения у ученика должны формироваться: желание и умение учиться, инициативность, самостоятельность, навыки сотрудничества в разных видах деятельности. Важное значение при этом обретает последовательность в обучении математике: от простого к сложному, от легкого к трудному, от известного к неизвестному, от отрывочных представлений к понятиям, от знания к умению, а от него к навыку. Сегодня учитель переосмысляет свой педагогический опыт и ставит перед собой вопросы: Как обучать детей? Как формировать умение учиться?

Средством, которое позволило поддержать интерес к учёбе у наших школьников, стала организация исследовательской работы по математике в 5–6 классах. В статье представлен опыт решения задачи учащимися в течение двух лет в 2010/11 – 2011/12 учебных годах[3]. Перед тем, как задача была предложена школьникам, учителями были выработаны идеи решения задачи, разработана серия опорных заданий. Очные встречи необходимы для презентации решения заданий, большая часть из которых выполнялась школьниками самостоятельно.

В математике известно пифагорово отношение $a^2 + b^2 = c^2$. Первая траектория наблюдения закономерностей отношения, приводит к алгебраическому толкованию, и позволяет описать такие тройки чисел a, b и c, которые удовлетворяют условию $a^2 + b^2 = c^2$. Эта часть достаточно подробно описана в работах Р. Рубинова[4].

Вторая траектория связана с историей появления отношения и непосредственно с геометрическим образом. Изначально пифагорово отношение формулировалось так: «Квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника, равновелик сумме

---

[1] **Опубликовано.** Сб.материалов VI общероссийская научно-практической конференции с международным участием «Исследовательская деятельность учащихся в современном образовательном пространстве», 15-17 ноября 2012

[2] ФГОС

[3] Назаров Д.И. Загадки «пифагорова отношения» $a^2 + b^2 = c^2$,

Назаров Д.И. Геометрические фигуры в теореме Пифагора // [Электронный ресурс] http://portfolio.1september.ru/person.php?id=232-695-738

[4] Рубинов Р. По следам теоремы Пифагора / Рубинов Р. //Квант.- 1981г. №11.-С.32-34.

квадратов, построенных на его катетах»[5]. Любопытно, при каких условиях сохраняется равенство, если на сторонах прямоугольного треугольника будут расположены не квадраты, а другие фигуры. При осуществлении небольшого перебора можно прийти к предположению о том, что площадь треугольника, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника равна сумме площадей однотипных треугольников, построенных на катетах. Таким образом, значимым условием могут являться тип фигуры и её линейные размеры. Однако, для обоснования предположения использование геометрического способа – разрезание квадратов, расположенных на катетах, на части и укладывание их в квадрат, расположеном на гипотенузе, как это делали пифагорейцы – не дает универсального способа для всех типов фигур.

Кроме того, возникает вопрос о точности выполнения действий и погрешности результата. В связи с этим, появляется необходимость использовать алгебраический способ. Достаточно подробно способы обобщения теоремы Пифагора, используя различные геометрические фигуры, представлены в работе Р. Рубинова. Таким образом, математическое исследование разворачивается вокруг «испытания» существования исходного утверждения для фигур, отличных от квадратов с длинами сторон, соответствующих сторонам треугольника.

При работе со школьниками эта задача разбивается на две части: 1) эмпирическое действие с фигурами, результатом которого является предположение об условиях сохранения равенства; 2) поиск способа обосновать обнаруженные закономерности. В статье описывается серия заданий, которая позволила развернуть этапы исследования со школьниками 5–6 класса. Этапами исследования мы называем: постановка проблемы, выдвижение гипотезы, обоснование, оформление, применение. Однако при работе со школьниками 5–6 класса речь идет о постановке задачи, как появлении удивительного факта, который достаточно обнаружить, выполняя натуральные действия с предметом. Эмпирическая работа с материалом разворачивается на этапах постановки задачи, а также на первых шагах, связанных с обоснованием предположений.

Отметим, что к началу работы над задачей школьники уже знают: геометрический способ нахождения площади прямоугольника, треугольника.

Этап постановка задачи. На элективном курсе для пятиклассников, проявляющих интерес к изучению математики, учащимся предлагалось З**адание 1,** из учебника математики Н.Я. Виленкина: «Существуют такие тройки чисел a,b и c, что $a^2 + b^2 = c^2$. Например, $6^2+8^2=10^2$. Обладают ли таким свойством тройки чисел: 7, 24, 25?».

Далее, учитель предложил ученикам найти другие тройки чисел, удовлетворяющих данному условию. В процессе поиска, кроме собственной смекалки, можно было использовать любые источники информации: книги, учебники, энциклопедии, интернет ресурсы. Задача о пифагоровых тройках позволяет на доступном уровне перейти к теореме Пифагора и ее геометрической интерпретации, поскольку каждая Пифагорова тройка выражает стороны прямоугольного треугольника.

Используя интернет-ресурсы, ребята обнаружили не только новые тройки чисел, но и способы их получения. Далее, на занятии обсуждение разворачивалось вокруг

[5] Литцман В. Теорема Пифагора/Государственное издание физико–математической литературы, Москва 1960

вспомогательного задания «Нарисуйте формулу пифагорова отношения». В результате беседы пришли к выводу, что компоненты пифагорова отношения можно связать с формулой площади квадрата. В качестве домашнего задания, учащимся предлагается **Задание 2: «**Выписать теорему Пифагора из учебника «Геометрия 7–9» Атанасяна Л.С., указать, для каких треугольников она выполняется». Задание 2 носит ознакомительный характер, показывает связь пифагорова отношения с прямоугольным треугольником

На следующем занятии, учитель предложил следующее **Задание 3: «**Построить на сторонах прямоугольного треугольника квадраты, найти их площади и сравнить сумму площадей, построенных на катетах прямоугольного треугольника с площадью фигуры, построенной на гипотенузе». Выполнив данное задание, учащиеся убеждаются, что пифагорово отношение выполняется для квадратов. Однако, кроме квадратов, ученики знакомы и с другими геометрическими фигурами. Если ученики самостоятельно не обнаруживают возможность варьировать условия задания, то учитель предлагает **Задание 4: «**Построить на сторонах прямоугольного треугольника половины квадратов, найти их площади и сравнить сумму площадей, построенных на катетах прямоугольного треугольника с площадью фигуры, построенной на гипотенузе». Учащиеся приходят к выводу, что разделить квадрат пополам можно двумя способами: получая два равных прямоугольника или два равных треугольника. Используя оба способа разделения квадрата, ученики строят на сторонах прямоугольного треугольника прямоугольники и треугольники. При выполнении преобразований, учащиеся пробуют располагать прямоугольники на сторонах прямоугольного треугольника разным образом (см. рис.1). В связи с разнообразием возможных действий, принимается договор, что рассмотрению будут подлежать только те фигуры, у которых одна из сторон совпадает со стороной прямоугольного треугольника. Такой договор возникает в ходе обсуждения того, какие параметры возможно изменять в исходном утверждении, а какие являются неизменными – существенными. Договор используется не только для прямоугольников, но и для всех проверяемых фигур. Например, одна из сторон совпадает со стороной прямоугольного треугольника, а другая (сторона, высота, радиус) увеличивается или уменьшается в одинаковое число раз относительно стороны треугольника, на которой они построены или выбирается произвольно.

Поскольку требуется выполнить перебор вариантов, то возможно, что часть задания – пробы вычисления площадей фигур, следует оставить на самостоятельное выполнение дома. Однако, предварительно договорившись о распределении частей задания, о форме предъявления результата – как по типу записи (таблица, чертежи), так и по форме утверждения. Например, результат наблюдений, записанный в форме утверждения «Если …, то… », может быть предъявлен в виде небольшого сообщения от группы учащихся, в котором рассказывается, как был получен результат. Тогда следующее занятие можно объявить семинаром, предварительно рассказав, значимость совместного обсуждения результатов.

«Испытывая» пифагорово отношение и представляя результаты на семинаре, обнаруживается, что равенство верно, если на сторонах прямоугольного треугольника построить прямоугольники, треугольники, полукруги, четвертинки кругов, но с соблюдением ограничений. В результате выполнения предыдущего задания ученики приходят к выводу, что пифагорово отношение выполняется не для всех прямоугольников и треугольников, поскольку требуется соблюдения пропорций. Про полукруги однозначный ответ ученики дать не могут, поскольку с площадью круга ещё не знакомы. При решении задачи в нашем случае, для измерения площадей фигур учащиеся использовали пересчёт квадратиков, составляющих данные фигуры. Для прямоугольников подсчет не вызвал затруднений, трудности возникли при работе с полукругами, секторами, треугольниками. Учащиеся самостоятельно пришли к выводу, что для вычисления площади удобнее применять формулы.

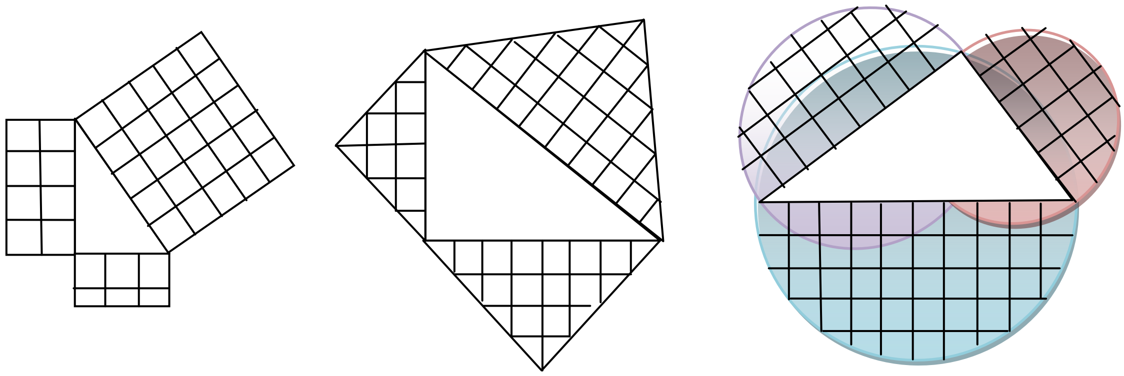

Рис. 1 ***Иллюстрации для проверки утверждения для прямоугольников, треугольников, полукругов***

Если семинар не состоялся, то возможно предложить ученикам **Задание 5 (испытания продолжаются):** «Построить на сторонах прямоугольного треугольника прямоугольники, у которых одна из сторон остается неизменной (совпадает со стороной треугольника), а другая изменяется в одинаковое число раз по отношению к этой стороне. В другом случае, построить прямоугольники, у которых одна из величин остается неизменной (совпадает со стороной треугольника), а другая изменяется произвольно по отношению к этой стороне. Все полученные результаты занести в таблицу». Рекомендации при выполнении Задания 5: каждый случай (уменьшение или увеличение в одинаковое количество раз) заполнять в отдельную таблицу; вывод фиксировать после каждого рассмотренного случая; полученные выводы обобщить. Ниже представлена Табл. №1, заполненная учениками для преобразований с прямоугольниками.

Таблица № 1. ***Проверка «отношения Пифагора» для прямоугольников***

Стороны прямоугольного треугольника	Стороны прямоугольников	Отношение площадей прямоугольников, стороны которых лежат		Вывод
		на катетах	на гипотенузе	
$a=3$ $b=4$ $c=5$	$a=3$ $a_1=1{,}5$ $b=4$ $b_1=2$ $c=5$ $c_1=2{,}5$	$S_1=4{,}5$, $S_2=8$, $S_1+S_2=$ **12,5**	$S=$**12,5**	$12{,}5=12{,}5$ $S=S_1+S_2$
$a=3$ $b=4$ $c=5$	$a=3$ $a_1=1{,}5$ $b=4$ $b_1=8$ $c=5$ $c_1=15$	$S_1=4{,}5$, $S_2=32$, $S_1+S_2=$ **36,5**	$S=$**75**	$36{,}5\neq 75$ $S\neq S_1+S_2$

Для перехода к следующему этапу работы с учащимися предлагается провести беседу, о том, что пифагорово отношение было проверено для ограниченного числа прямоугольников. А этого не достаточно, чтобы утверждать правильность пифагорова отношения для всех существующих прямоугольников. Если учащиеся самостоятельно не придут к выводу, что средством проверки равенства для всех существующих прямоугольников, является формула, то учитель предлагает **Задание 6:** «Проверить пифагорово отношение для прямоугольников, построенных на сторонах прямоугольного треугольника со сторонами *a, b, c.* Одна из сторон прямоугольника совпадает со стороной прямоугольного треугольника, другая изменяется в одинаковое число раз».

Учителем организуется коммуникация между учащимися, направленная на обнаружение случаев изменения сторон фигур с исходными значениями. В фиксации результата ученикам предлагается использовать уже известную форму таблицы. Например, для прямоугольника может быть заполнена Таблица № 2. Аналогичным образом проверяется пифагорово отношение для треугольников. В этом случае основание «экспериментальных» треугольников совпадает со стороной прямоугольного треугольника, а высота меняется в одинаковое количество раз, или выбирается произвольно.

Таблица № 2. ***Проверка «отношения Пифагора» для прямоугольников***

Стороны прямоугольного треугольника	Стороны прямоугольника, которые не лежат на катете	Отношение площадей прямоугольников, стороны которых лежат		Вывод
		на катетах	на гипотенузе	
a,b,c	$a,2a$ $b,2b$ $c,2c$	$S_1=2a^2$, $S_2=2b^2$, $S_1+S_2= 2(a^2+b^2)$	$S=2c^2$	$2(a^2+b^2)=2c^2$ $a^2+b^2=c^2$ $S=S_1+S_2$
a,b,c	$a, a/2$ $b, b/2$ $c, c/2$	$S_1=a^2/2$, $S_2=b^2/2$, $S_1+S_2= a^2+b^2)/2$	$S=c^2/2$	$(a^2+b^2)/2=c^2/2$ $a^2+b^2=c^2$ $S=S_1+S_2$
a,b,c	a,ka b,kb c,kc $k>0$	$S_1=ka^2$, $S_2=kb^2$, $S_1+S_2= k(a^2+b^2)$	$S=kc^2$	$k(a^2+b^2)=kc^2$ $a^2+b^2=c^2$ $S=S_1+S_2$

Для полукругов и четвертинок кругов меняются только стороны прямоугольного треугольника. **Задание 7:** «Найти в журнале Квант 1981г. №11 статью Рубинова Р. «По следам теоремы Пифагора». По рисунку 5 восстановить способ построения фигуры».

Рассмотрим квадрат ABCD, с описанной около него окружностью. Построим окружность диаметром AB. Заштрихованную фигуру мы будем называть лункой.

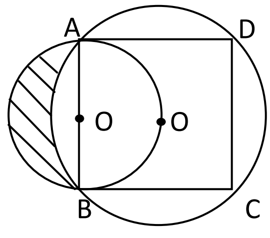

Рис 2. *Лунка*

Задание 8: «Вывести формулу для нахождения площади лунки». Учитывая реальные учебные возможности учащихся, можно предложить либо готовую формулу для рассмотрения либо вывести ее на занятии.

Задание 9: «Проверить пифагорово отношение для лунок, построенных на сторонах прямоугольного треугольника. Результат занести в таблицу. Сделать вывод о его выполнимости».

Таблица № 3. ***Проверка отношения для лунок***

Стороны прямоугольного треугольника	Квадрат радиусов лунок	Отношение площадей лунок, радиусы которых лежат		Вывод
		на катетах	на гипотенузе	
a,b,c	$a^2/2$, $a^2/4$ $b^2/2$, $b^2/4$ $c^2/2$, $c^2/4$	$S_1= a^2/4$ $S_2=b^2/4$ $S_1+S_2=(a^2+b^2)/4$	$S= c^2/4$	$(a^2+b^2)/4= c^2/4$ $a^2+b^2=c^2$ $S=S_1+S_2$

Вывод: Сумма площадей лунок, построенных на катетах, равна площади лунки, построенной на гипотенузе.

В заключении учащиеся формулируют общий вывод:

Если на сторонах прямоугольного треугольника построить фигуры одного вида, у которых одна из величин остается неизменной (совпадает со стороной треугольника), а другая (сторона, высота, радиус) изменяется в одинаковое число раз по отношению к этой стороне, то «пифагорово отношение» верно.

Если на сторонах прямоугольного треугольника построить фигуры одного вида, у которых одна из величин остается неизменной (совпадает со стороной треугольника), а другая (сторона, высота, радиус) изменяется произвольно по отношению к этой стороне, то «пифагорово отношение» неверно.

Серия заданий, предложенная в статье, позволяет не нарушать логику рассуждений выдвижении и обосновании гипотезы об условиях выполнения пифагорова отношения. Длительная работа с учащимися над исследовательскими задачами позволяет предположить, что отсутствие внеурочной "поддержки" уроков математики в V – VI классах среднем звене влечет за собой снижение уровня интереса к предмету для некоторых учащихся. Как показывает опыт, заинтересованные учащиеся большую часть работы выполняют самостоятельно. Значимым методическим приёмом является – организация семинаров, на которых обсуждаются полученные самостоятельно результаты, а также делаются сообщения по прочитанным статьям.